×64× :NTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d Admission 1977

SUJET OPTION M

(Trois pages dactylographiées)

MATHEMATIQUES I

Le candidat pourra utiliser tous les résultats fournis par l'énoncé, même ceux qu'il n'aura pas su justifier. En revanche, les démonstrations incorrectes seront sévèrement sanctionnées.

A tout entier naturel n, on associe l'équation différentielle :

$$xy'' - 2n\,y' + xy = 0 \qquad (E_n)$$

Par solution de E_n, on entend solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, ou, plus précisément, application deux fois dérivable $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x\,\psi''(x) - 2n\,\psi'(x) + x\,\psi(x) = 0$$

1- Montrer que si ψ_n est une solution de E_n telle que $\psi_n(0) = 0$, alors l'application $\psi_{n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déterminée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi_{n+1}(x) = \int_0^x t\,\psi_n(t)\,dt \qquad (1)$$

est une solution de E_{n+1} telle que $\psi_{n+1}(0) = 0$.

2- A partir de la solution $A_0 : x \longmapsto \sin x$ de E_0, on obtient, grâce à (1), une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n soit une solution de E_n vérifiant $A_n(0) = 0$.

a) Que peut-on dire de la parité de A_n ?

Expliciter $A_1(x)$ et $A_2(x)$. Etudier les variations de la restriction de A_1 à $[0, 3\pi/2]$

Montrer :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \forall x \in \left]0,\ 5\pi/4\right] \qquad A_n(x) > 0 \qquad (2)$$

b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n admet un développement en série entière de rayon de convergence infini. Pour n donné, écrire le développement en série entière de A_n.

c) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$ donné, il existe $\lim_{n \to +\infty} A_n(x)$.

On se ramènera au cas $x \geqslant 0$.

On écrira : $A_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\,\alpha_{n,p}(x)$, et on montrera que, pour n assez grand : $0 \leqslant A_n(x) \leqslant \alpha_{n,0}(x)$.

3-a) Montrer que, si P et Q sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x)\cos x + Q(x)\sin x = 0$$

alors les polynômes P et Q sont nuls.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes U_n et V_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad A_n(x) = U_n(x)\sin x - V_n(x)\cos x$$

.../...

Que peut-on dire de la parité de la fonction associée au polynôme U_n (resp. V_n) ?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par B_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(x) = U_n(x) \cos x + V_n(x) \sin x$$

Que peut-on dire de la parité de B_n ?

Montrer que B_n est une solution de E_n.

Vérifier : $\forall x \in \mathbb{R} \quad B'_{n+1}(x) = x\, B_n(x)$

d) Vérifier que, pour $n \geq 2$, l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A_n(x) = (2n-1)\, A_{n-1}(x) - x^2 A_{n-2}(x) \qquad (3)$$

En déduire des relations de récurrence respectivement vérifiées par les U_n, par les V_n et par les B_n.

Préciser, suivant la parité de n, les degrés des polynômes U_n et V_n ; déterminer les monômes non nuls de plus bas degré de ces polynômes.

4- Pour n donné, déterminer <u>toutes</u> les solutions de E_n.

5-a) Expliciter $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$. Etudier les variations des restrictions de B_1 et B_2 à $[0, 3\pi/2]$.

Montrer :

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in [0, 5\pi/4] \qquad B_n(x) > 0 \qquad (4)$$

$$\forall n \geq 3 \quad \forall x \in [0, 5\pi/4] \qquad B_n(x) \geq U_n(0) \qquad (5)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \pi/2] \qquad U_n(x) > 0 \qquad (6)$$

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in [\pi, 5\pi/4] \qquad U_n(x) < 0 \qquad (7)$$

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in [\pi/2, \pi] \qquad V_n(x) > 0 \qquad (8)$$

(On aura à utiliser des expressions de U_n et V_n en fonction de A_n et B_n).

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $V_n U_{n-1} - U_n V_{n-1}$ n'est autre que le monôme X^{2n-1}.

Montrer :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in]0, \pi] \qquad V_n(x) > 0 \qquad (9)$$

c) Montrer que, pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ donné, la suite

$$(W_n(x))_{n \geq 1} \quad , \text{ avec } W_n(x) = \frac{V_n(x)}{U_n(x)},$$

est monotone et admet tg x pour limite.

6- a) Montrer, par récurrence, que, pour $n \geq 2$, U_n possède au moins un zéro strictement positif et que, si l'on désigne par x_n le plus petit zéro strictement positif de U_n, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et admet une limite λ.

Montrer : $\lambda = \pi/2$.

b) Montrer que, pour $n \geq 3$, V_n possède au moins un zéro strictement positif et que, si l'on désigne par y_n le plus petit zéro strictement positif de V_n, la suite $(y_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante et admet une limite μ.

Montrer : $\mu = \pi$.

7- Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = 2n - 1$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier les égalités :

$$\begin{cases} U_1(x) = a_1 \\ U_2(x) = a_1 a_2 - x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2(x) = a_2 x \\ V_3(x) = a_2 a_3 x - x^3 \end{cases}$$

.../...

Montrer que, pour $n \geqslant 2$ *on peut poser :*

$$U_n(x) = \psi_n(a_1, .., a_{n-1}, a_n, x) \text{ et } V_n(x) = \phi_n(a_2, .., a_{n-1}, a_n, x)$$

et qu'alors on a :

$$U_{n+1}(x) = a_{n+1}\,\psi_n\left(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - \frac{x^2}{a_{n+1}}, x\right).$$

et

$$V_{n+1}(x) = a_{n+1}\,\phi_n\left(a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - \frac{x^2}{a_{n+1}}, x\right).$$

Montrer que, par ailleurs :

$$V_{n+1}(x) = x\,\psi_n(a_2, .., a_n, a_{n+1}, x).$$

b) Soit $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$. *Justifier les égalités :*

$$W_1(x) = \frac{x}{a_1} \; ; \; W_2(x) = \frac{x}{a_1 - \frac{x^2}{a_2}} \; ; \; W_3(x) = \frac{x}{a_1 - \frac{x^2}{a_2 - \frac{x^2}{a_3}}}$$

et, plus généralement :

$$W_n(x) = \cfrac{x}{a_1 - \cfrac{x^2}{a_2 - \cfrac{x^2}{a_3 - \ddots - \cfrac{x^2}{a_{n-1} - \cfrac{x^2}{a_n}}}}}$$

oooooooooo

oooo

o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail